



1 ?? С какой минимальной скоростью  $v_{m1}$  Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?

Пока камень не долетел до притягивающего луча, он движется с постоянным ускорением  $\vec{g}$ . Дальность полёта камня, брошенного с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту равна

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при  $\alpha = 45^\circ$ , следовательно

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

Ответ:

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

2 ?? С какой минимальной скоростью  $v_{m2}$  Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?

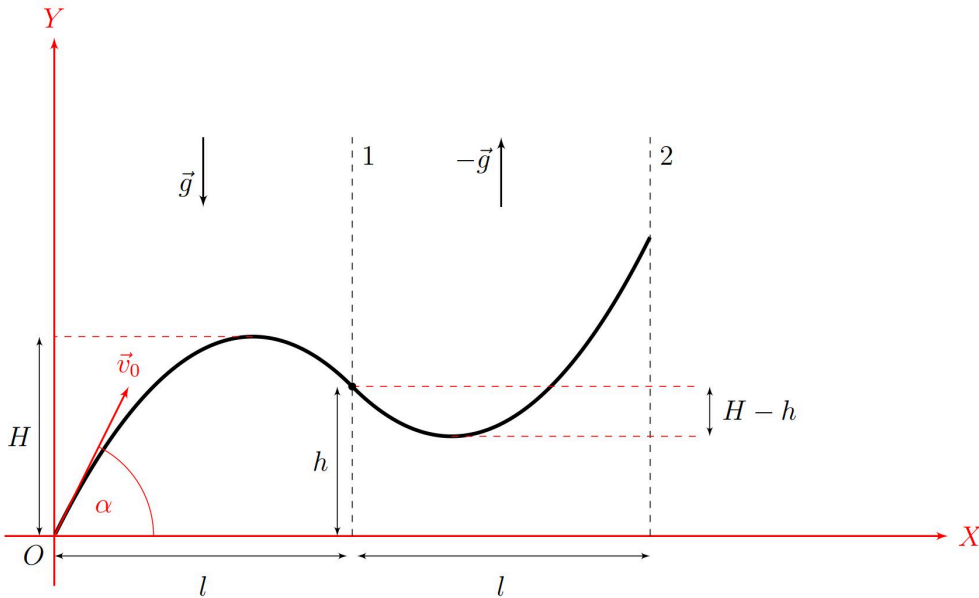
Направим ось  $OX$  горизонтально, а ось  $OY$  — вертикально вверх; в качестве начала отсчёта  $O$  выберем положение Глюка. Левую и правую (по ходу полёта камня) границы области, ограниченной притягивающим лучом, пронумеруем 1 и 2 соответственно (см. рисунок). Ясно, что внутри луча камень движется с ускорением  $-\vec{g}$ , и если он пересекает границу 1 так, что проекция его скорости  $v_y \geq 0$ , то камень достигнет и границы 2. Этому соответствует условие

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 \geq 0,$$

где  $t_1 = l/(v_0 \cos \alpha)$ , а  $\alpha$  — угол между  $\vec{v}_0$  и горизонтом. Следовательно, чтобы пролететь область, ограниченную лучом, насквозь, заведомо достаточно скорости

$$v'_{m2} = \sqrt{\frac{2gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Проверим, что  $v_{2m} < v'_{m2}$ . Характерная для такого случая траектория камня приведена на рисунке. Её участок левее границы 2 обладает центральной симметрией относительно точки пересечения границы 1. Пусть  $H$  — наибольшая высота подъёма камня на участке слева от луча, а  $h$  — высота, на которой камень пересекает границу 1.



Траектория камня при  $v > v_{m1}$  обладает центральной симметрией

Из сказанного выше следует (см. рисунок), что для того, чтобы камень достиг границы 2, достаточно

$$H - h < h \quad \Rightarrow \quad h > H/2.$$

Из закона равноускоренного движения следует, что

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$
$$h = y(l) = \operatorname{tg} \alpha \cdot l - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot l^2.$$

Тогда условие  $h > H/2$  может быть приведено к виду

$$\frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{8gl}{\sin 2\alpha} \cdot v_0^2 + v_0^4 < 0.$$

Выделим в этом выражении полный квадрат:

$$\left( \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - v_0^2 \right)^2 - \frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} < 0.$$

Откуда выразим  $v_0^2$  (напомним, что нас интересуют значения  $v_0^2 < 2gl/\sin 2\alpha$ , так что выражение в скобках положительно):

$$v_0^2 > \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sqrt{2}gl}{\sin 2\alpha} = \frac{2(2 - \sqrt{2})gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть меньше  $v'_{2m}$  и достигает минимального значения при  $\alpha = 45^\circ$ , следовательно

$$v_{m2} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})gl}.$$

Ответ:

$$v_{m2} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})lg} \approx \sqrt{1,17lg}.$$

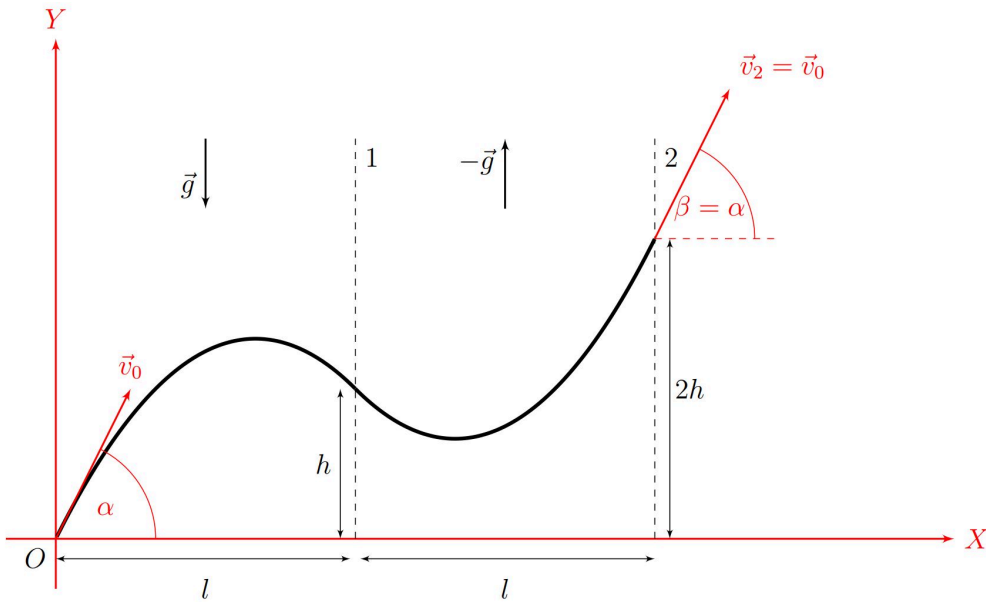
3 ?? Какова максимальная дальность броска  $L_{m2}$ , если начальная скорость камня равна  $v_0$  ( $v_0 \geq v_{m2}$ )?

Горизонтальная компонента скорости камня неизменна, следовательно участки слева от притягивающего луча и внутри него камень проходит за одно время

$$t_0 = t_1 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Найдём скорость камня при пересечении границы 2

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_0 - \vec{g}t_1 = \vec{v}_0.$$



Камень пересекает границу 2 со скоростью  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$

Из соображений симметрии (см. рисунок) следует, что камень пересекает границу 2 на высоте  $2h$ . Время  $t_2$ , за которое он после этого упадёт на землю,

$$2h + v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$

Этому соответствует горизонтальное смещение

$$l_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{4hv_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}.$$

Подставим в это выражение

$$h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

и получим

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2lv_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2}.$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

$l_2$  монотонно возрастает при увеличении  $\sin 2\alpha$ , следовательно достигает максимального значения при  $\alpha = 45^\circ$ ,

$$l_{m2} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Искомое расстояние  $L_{m2} = 2l + l_{m2}$ .

Ответ:

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}$$

4 ?? Найдите максимальную дальность броска  $L_{m3}$  в случае  $v_0 = v_{m2}$ .

Поскольку и  $v_{m2}$ , и  $L_{m2}$  соответствуют броску под углом в  $45^\circ$ , достаточно подставить  $v_0^2 = 2(2 - \sqrt{2})gl$  в выражение для  $L_{m2}$ . Получим

$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right)l = (2 + \sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

Ответ:

$$L_{m3} = (2 + \sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.



1 ?? Определите установившуюся скорость вращения  $\omega_x$  второго диска.

Рассмотрим момент времени, когда валик и правый диск вращаются с постоянными угловыми скоростями  $\Omega$  и  $\omega_x$  соответственно. Введём ось  $Oy$ , направленную вдоль оси симметрии валика влево, с началом в центре его правого основания.

Сила трения, действующая на правый диск, меняет своё направление в некоторой точке с координатой  $y_x$ . На участке с координатой от 0 до  $y_x$  скорость точек валика  $\Omega r$  больше, чем скорость точек диска  $v_x = \omega_x y$ , значит сила трения на этом участке направлена по скорости точек валика ("от нас"). Аналогично можно показать, что на участке от  $y_x$  до  $R$ , сила трения направлена против скорости точек валика ("на нас").

Сила трения, действующая на участке длиной  $\Delta y$ , равна  $f \Delta y$ , где  $f$  — сила трения, приходящаяся на единицу длины. Плечо силы трения линейно меняется вдоль оси  $Oy$ . Равнодействующая такой силы приложена к середине указанного отрезка. С учётом того, что суммарный момент внешней силы трения, действующей на правый диск, равен нулю, получаем:

$$f y_x \cdot \frac{y_x}{2} = f (R - y_x) \cdot \frac{R + y_x}{2}.$$

Откуда  $y_x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .

Сила трения, действующая на валик со стороны левого диска меняет своё направление в некоторой точке с координатой  $y_0$ . Плечо этой силы постоянно и равно  $r$ , а так как валик равномерно вращается, то суммарный момент силы трения, действующей на валик относительно оси вращения также равен нулю, а значит:

$$f y_x \cdot r + f (2R - y_0) \cdot r = f (y_0 - y_x) \cdot r.$$

Откуда  $y_0 = y_x + R = \frac{R}{\sqrt{2}} + R$ .

.

В точках с координатами  $y_x$  и  $y_0$ , где сила трения меняет направление, скорости точек дисков равны скорости точек валика  $\Omega r$ . Скорость точки правого диска с координатой  $y_x$  равна  $\omega_x \cdot y_x = \omega_x \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Скорость точки левого диска с координатой  $y_0$  равна  $\omega_0 \cdot (2R - y_0) = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$ .

С учётом этого  $\omega_x \frac{R}{\sqrt{2}} = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$  или

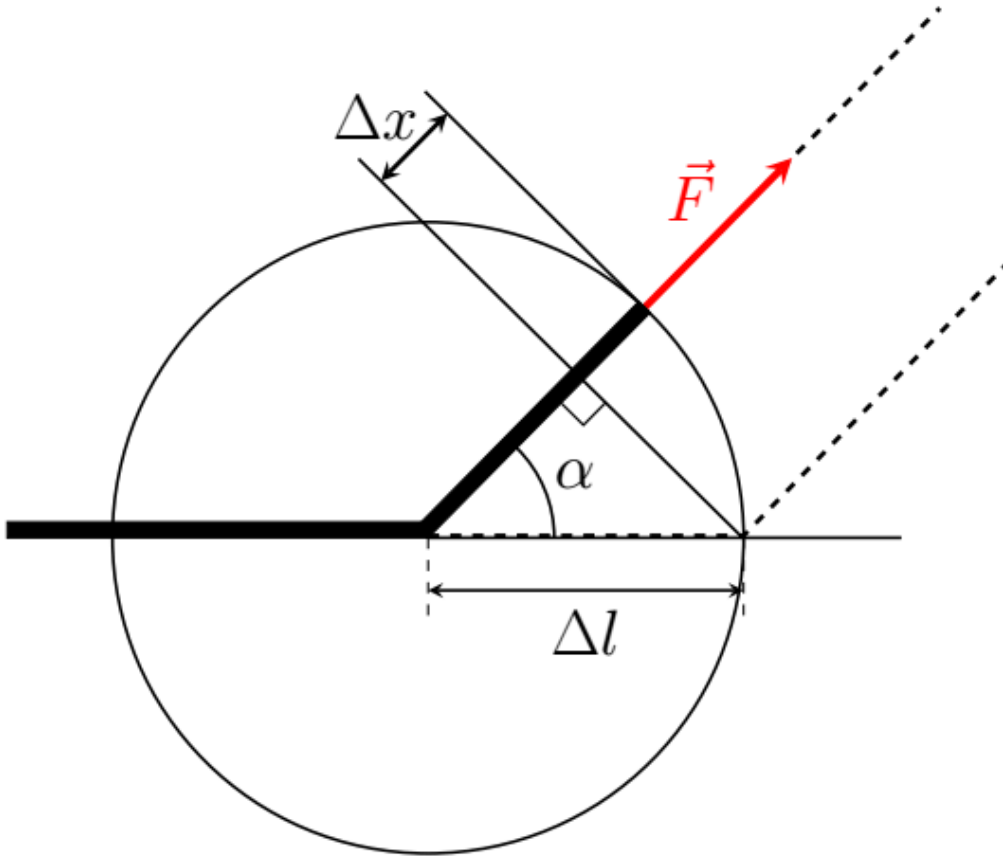
Ответ:  $\omega_x = \omega_0 (\sqrt{2} - 1)$ .



1 ?? Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

Когда приложенная сила  $F$  постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты  $\alpha$  также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины  $\Delta l$ , точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние  $\Delta x$ , совершая при этом работу, которую можно связать с величиной  $\sigma$  и площадью ленты оторвавшейся части ленты  $\Delta S = d \cdot \Delta l$ :

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l \quad (1).$$



Перемещение точки приложения силы  $\Delta x$  может быть выражено через  $\Delta l$  и  $\alpha$ :

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (2).$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы  $F = F(\alpha)$ , необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе  $1 - \cos \alpha = 2$ , то есть при  $\alpha = \pi$ .

Ответ:  $\alpha = \pi$ .

2 ?? Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте  $H = 1$  м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил  $\alpha_1 = 45^\circ$ . К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза  $m$  система будет покоиться?

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать  $T$ . Из условия равновесия груза  $T = mg$ .

Очевидно, что если сила натяжения  $T$  не превышает силу отрыва ленты для угла  $\alpha_1$ , то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила  $T$ , которая может быть достигнута при равновесии системы  $T = \sigma d / (1 - \cos \alpha_1)$ . Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos \alpha_1) \cdot g} \approx 0,068 \text{ кг}.$$

Ответ:  $m \approx 68$  г.

3 ?? К первому грузу с максимально возможной массой  $m$  из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой  $M$  и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом  $\alpha_2 = 30^\circ$  к горизонту. Найдите массу второго груза  $M$ , расстояние  $\Delta h$ , на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения  $a_1$  и в момент остановки  $a_2$ .

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой  $M$ . Для начала определим длину участка ленты  $\Delta L$ , который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока  $H$  и углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\Delta L = \frac{H}{\text{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\text{tg} \alpha_1} \approx 0,732 \cdot H = 0,732 \text{ м}.$$

Для нахождения  $\Delta h$  используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h.$$

где  $L_1 = H / \sin \alpha_1$  и  $L_2 = H / \sin \alpha_2$  — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{H}{\sin \alpha_1} - \frac{H}{\sin \alpha_2} = \\ &= H \left( \frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \right) \approx 0,146 \cdot H = 0,146 \text{ м.} \end{aligned}$$

Ответ:  $\Delta h \approx 14,6$  см.

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m + M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0,032 \text{ кг} = 32 \text{ г.}$$

Ответ:  $M \approx 32$  г.

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_1)} \approx 3,2 \text{ м/с}^2,$$

и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_2)} - g \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Ответ:  $a_1 \approx 3,2 \text{ м/с}^2$ ,  $a_2 \approx 4,9 \text{ м/с}^2$ .



1 4.00 На какое расстояние  $h_0$  сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна  $T_0$ ?

Пусть смещение концов столбика ртути после переворота трубки равно  $h_0$ . Разность давлений воздуха в левой и правой частях трубки  $\Delta P = P_{\text{л}} - P_{\text{п}}$  уравнивается избыточным гидростатическим давлением ртути  $2\rho gh_0$ . Используя закон Бойля-Мариотта, найдем:

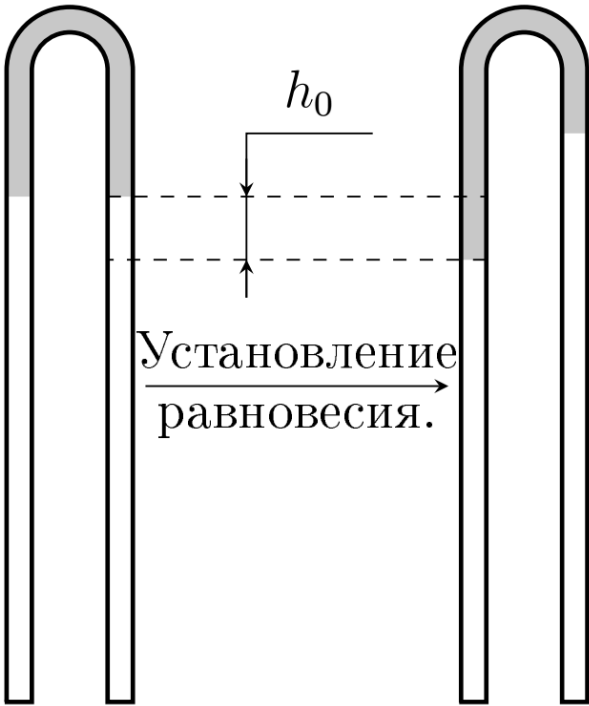
$$P_{\text{л}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0}, \quad P_{\text{п}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0}.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути :

$$P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0} - P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0} = 2\rho gh_0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{2lh_0P_{\text{А}}}{l^2 - h_0^2} = 2\rho gh_0.$$



Решения этого уравнения

$$h_0 = 0, \quad h_0 = \pm \sqrt{l \left( l - \frac{P_{\text{А}}}{\rho g} \right)}.$$

При  $P_{\text{А}} = 750 \text{ мм.рт.ст.} > 625 \text{ мм.рт.ст.} = \rho gl$  подходит только один из корней  $h_0 = 0$ . Таким образом, сразу после переворота столбик ртути не смещается.

Ответ:  $h_0 = 0 \text{ мм.}$

2 3.00 На какое расстояние  $h_1$  сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до  $T_1 = 0,8T_0$ ?

Понижение температуры до  $0,8T_0$  соответствует изменению начального давления воздуха (давления воздуха в трубке с запаянными концами до её переворота) с  $P_{\text{А}}$  до  $P_1 = 0,8P_{\text{А}} = \rho gL_1$ , где  $L_1 = 0,8 \cdot 750 \text{ мм} = 600 \text{ мм}$ . В этом случае существует решение:

$$h_1 = \sqrt{l \left( l - \frac{P_1}{\rho g} \right)} = \sqrt{l(l - L_1)} = \sqrt{0,625(0,625 - 0,600)} \text{ м} = \frac{l}{5} = 125 \text{ мм.}$$

Можно показать, что именно это решение соответствует устойчивому положению столбика ртути. Корень  $h_1 = 0 \text{ мм}$  соответствует неустойчивому положению, то есть при небольшом смещении столбика ртути избыточное гидростатическое давление превышает разность давлений воздуха в левом и правом участках трубки и ртуть стремится занять положение, соответствующее устойчивому положению.

Покажем, что корень  $h_1 = 125 \text{ мм}$  соответствует устойчивому равновесию. Пусть от положения равновесия столбик ртути сместилась дополнительно на некоторое малое расстояние  $x$ , тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_1}{l - h_1 - x} = \frac{lP_1}{l - h_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_1}} \approx \frac{lP_1}{l - h_1} \left( 1 + \frac{x}{l - h_1} \right) = \frac{lP_1}{l - h_1} + \frac{x l P_1}{(l - h_1)^2}.$$

Аналогично для давления в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_1}{l + h_1 + x} \approx \frac{lP_1}{l + h_1} - \frac{x l P_1}{(l + h_1)^2}.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$\begin{aligned} F_{\text{д}}(x) &= (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left( \frac{lP_1}{l - h_1} - \frac{lP_1}{l + h_1} \right) S + \left( \frac{1}{(l - h_1)^2} + \frac{1}{(l + h_1)^2} \right) x l P_1 S = \\ &= F_{\text{д}}(0) + \frac{2(l^2 + h_1^2)}{(l^2 - h_1^2)^2} x l P_1 S. \end{aligned}$$

Сила, равная разности сил тяжестей, действующих на столбики ртути в разных частях сосуда, стремится вывести столбик ртути из положения равновесия:

$$F_{\text{Т}}(x) = \rho S(l/4 + h_1 + x) - \rho S(l/4 - h_1 - x) = 2\rho gSh_1 + 2\rho gSx = F_{\text{Т}}(0) + 2\rho gSx.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учётом равенства  $F_{\text{Д}}(0) = F_{\text{Т}}(0)$  в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{Д}} - F_{\text{Т}} = 2 \left( \frac{(l^2 + h_1^2)lL_1}{(l^2 - h_1^2)^2} - 1 \right) \rho gSx.$$

Подставив в выражение корень  $h_1 = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_{\text{Д}} - F_{\text{Т}} &= 2 \left( \frac{(l^2 + 0^2)lL_1}{(l^2 - 0^2)^2} - 1 \right) \rho gSx = 2 \left( \frac{L_1}{l} - 1 \right) \rho gSx = \\ &= 2 \left( \frac{600 \text{ мм}}{625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho gSx < 0, \end{aligned}$$

т.е. суммарная сила, действующая на систему, будет выводить её из положения равновесия, и  $h_1 = 0$  мм соответствует неустойчивому положению равновесия. Подставив  $h_1 = l/5$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_{\text{давл}} - F_{\text{тяж}} &= 2 \left( \frac{(l^2 + (l/5)^2)lL_1}{(l^2 - (l/5)^2)^2} - 1 \right) \rho gSx = 2 \left( \frac{25 \cdot 26 \cdot L_1}{24^2 \cdot l} - 1 \right) \rho gSx = \\ &= 2 \left( \frac{25 \cdot 26 \cdot 600 \text{ мм}}{24^2 \cdot 625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho gSx = 2 \left( \frac{26}{24} - 1 \right) \rho gSx > 0, \end{aligned}$$

т.е. суммарная сила, действующая на систему, будет стремиться вернуть её в положение равновесия, и  $h_1 = l/5 = 125$  мм соответствует устойчивому положению равновесия.

Ответ:  $h_1 = \frac{l}{5} = 125$  мм.

3 4.00 На какое расстояние  $h_2$  сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до  $T_2 = 0,7T_0$ ?

Расчёт по полученной формуле для смещения при начальном давлении  $P_2 = 0,7P_A = \rho gL_2$ , где  $L_2 = 0,7 \cdot 750 \text{ мм} = 525 \text{ мм}$ , соответствующего температуре  $T_2 = 0,7T_0$ , даёт результат:

$$h_2 = \sqrt{l \left( l - \frac{P_2}{\rho g} \right)} = \sqrt{0,625 (0,625 - 0,525)} \text{ м} = 0,25 \text{ м} = 250 \text{ мм} = \frac{2l}{5} > \frac{l}{4}.$$

Но в этом случае столбик ртути целиком перемещается в одну из частей трубки и выражение для избыточного гидростатического давления  $2\rho gh_2$  должно быть заменено на  $\frac{\rho gl}{2}$ .

Пусть столбик ртути целиком перешёл в одну из частей трубки и его нижний конец переместился вниз на  $h_2$ , тогда в левой и правой частях трубки давление будет соответственно равно:

$$P_{\text{л}} = P_2 \frac{l}{l - h_2} = \frac{\rho glL_2}{l - h_2}, \quad P_{\text{п}} = P_2 \frac{l}{l + h_2} = \frac{\rho glL_2}{l + h_2}.$$

Условие равновесия столбика выглядит теперь следующим образом:

$$\frac{2\rho glL_2h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{\rho gl}{2}.$$

Получим квадратное уравнение:

$$h_2^2 + 4L_2h_2 - l^2 = 0,$$

которое имеет корни

$$h_2 = -2L_2 \pm \sqrt{4L_2^2 + l^2}.$$

Отбросив отрицательный корень, получаем ответ:

$$h_2 = \sqrt{4 \cdot \left( \frac{T_2P_A}{T_0\rho g} \right)^2 + l^2} - \frac{2T_2P_A}{T_0\rho g} = \sqrt{4 \cdot 0,525^2 + 0,625^2} \text{ мм} - 2 \cdot 0,525 \text{ мм} \approx 172 \text{ мм}.$$

Ответ:  $h_2 \approx 172$  мм.

4 1.00 Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.

Покажем, что  $h_2 \approx 172$  мм соответствует устойчивому положению равновесия. Пусть от положения равновесия ртуть дополнительно сместилась на малое расстояние  $x > 0$ , тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_2}{l - h_2 - x} = \frac{lP_2}{l - h_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l-h_2}} = \frac{lP_2}{l - h_2} + \Delta P_1, \quad \Delta P_1 > 0.$$



Аналогично находим давление газа в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_2}{l+h_2+x} = \frac{lP_2}{l+h_2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{l+h_2}} = \frac{lP_2}{l+h_2} - \Delta P_2, \Delta P_2 > 0.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$\begin{aligned} F_{\text{д}} &= (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left( \frac{lP_2}{l-h_2} - \frac{lP_2}{l+h_2} \right) S + (\Delta P_1 + \Delta P_2) S = \\ &= F_{\text{д}0} + (\Delta P_1 + \Delta P_2) S. \end{aligned}$$

Сила тяжести не изменяется при движении столба жидкости внутри одной части сосуда:

$$F_{\text{т}} = \rho S l g / 2.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учетом равенства  $F_{\text{д}0} = F_{\text{т}}$  в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = (\Delta P_1 + \Delta P_2) S > 0,$$

т.е. результирующая сила положительна и положение равновесия устойчиво.

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

1 ?? При какой температуре воздуха  $t_1$  экран прибора показал бы значение, превышающее  $t_1$  на  $1\text{ }^\circ\text{C}$ ?

Пусть  $U_0$  — номинальное напряжение источника. Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$U_0^2 G(t) = k(t - t_{\text{в}}), \quad (*)$$

где  $t$  — собственная температура термистора,  $t_{\text{в}}$  — температура воздуха, а  $k$  — коэффициент пропорциональности в законе Ньютона-Рихмана. Определяя по графику значение проводимости при температуре  $t = 29\text{ }^\circ\text{C}$

$$G(29\text{ }^\circ\text{C}) = 1,2G_{25}$$

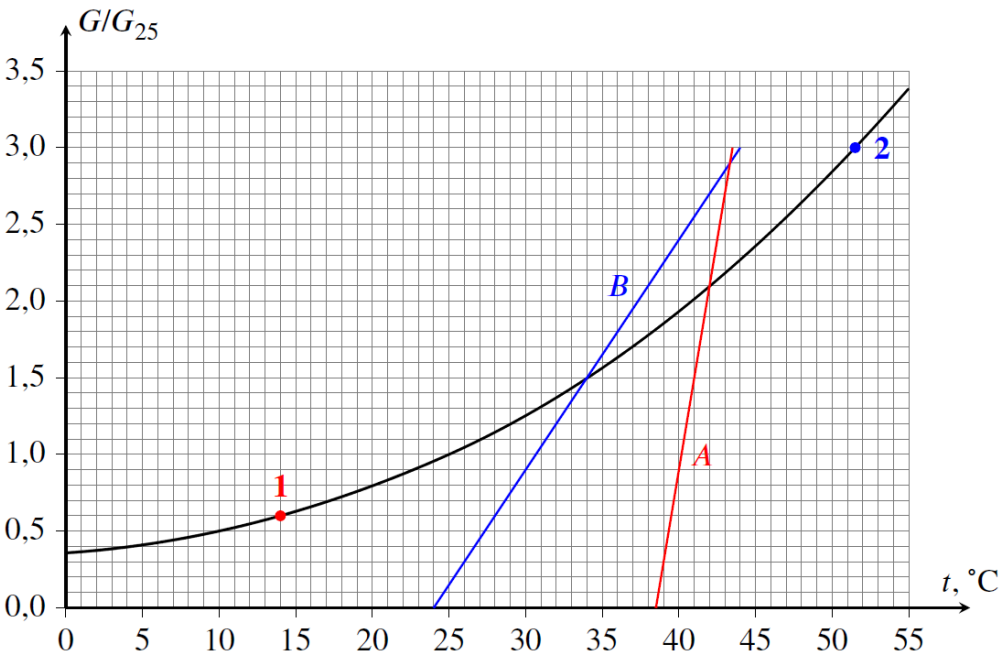
и подставляя  $t_{\text{в}} = 27\text{ }^\circ\text{C}$ , получим, что

$$k = 0,6 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot U_0^2 G_{25}.$$

Пусть теперь температура воздуха равна  $t_1$ , а температура термистора, соответственно,  $(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C})$ . Подставим эти значения в (\*):

$$U_0^2 G(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C}) = k \cdot 1\text{ }^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad G(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C}) = 0,6G_{25}.$$

Данное значение проводимости (точка 1 на рис.) соответствует температуре  $t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C} = 14\text{ }^\circ\text{C}$ , откуда  $t_1 = 13\text{ }^\circ\text{C}$ .



Ответ:  $t_1 = 13\text{ }^\circ\text{C}$ .

2 ?? Какое значение показал бы экран прибора при температуре воздуха  $38,5\text{ }^\circ\text{C}$ ?

Пусть теперь  $t_{\text{в}} = 38,5\text{ }^\circ\text{C}$ . Тогда

$$U_0^2 G(t) = k(t - 38,5\text{ }^\circ\text{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t)}{G_{25}} = 0,6 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (t - 38,5\text{ }^\circ\text{C}).$$

Полученное уравнение решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением, поверх данного в условии графика (прямая  $A$  на рис.). Точка пересечения соответствует температуре термистора  $t = 42\text{ }^\circ\text{C}$ .

Ответ:  $42\text{ }^\circ\text{C}$ .

3 ?? Продолжая эксперименты, Глюк увеличил напряжение источника, сделав его вдвое больше номинального. Какое значение температуры покажет экран в этом случае, если Глюк не менял настройки компьютера, а температура воздуха в лаборатории равна  $24\text{ }^\circ\text{C}$ ?

Пусть при напряжении источника  $2U_0$  и температуре воздуха  $t_{\text{в}} = 24\text{ }^\circ\text{C}$ , термистор в установившемся режиме имеет температуру  $t_2$ . Запишем условие теплового равновесия для термистора и подставим в него выражение для  $k$ :

$$4U_0^2 G(t_2) = k(t_2 - t_{\text{в}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_2)}{G_{25}} = 0,15 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (t_2 - 24\text{ }^\circ\text{C}).$$

Полученное уравнение снова решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением (прямая  $B$  на рис.):

$$t_2 = 34\text{ }^\circ\text{C}, \quad G(t_2) = 1,5G_{25}.$$

Однако экран прибора будет показывать не значение  $t_2$ , а совершенно другое число  $t_* \neq t_2$ ! Это связано с тем, что встроенный компьютер, переводящий показания амперметра в значение температуры, выводимое на экран настроен на напряжение  $U_0$ . Чтобы найти формулу для пересчёта, запишем выражения для силы тока через термистор в двух случаях: 1) напряжение равно  $U_0$ , температура равна  $t_*$ ; 2) напряжение равно  $2U_0$ , температура —  $t_2$

$$I_1 = U_0 G(t_*) \text{ и } I_2 = 2U_0 G(t_2).$$

Приравнивая их, получим

$$G(t_*) = 2G(t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_*)}{G_{25}} = 3.$$

Отсюда, по графику (точка 2 на рис.), определяем, что  $t_* \approx 51,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Ответ: 51,5 °C.

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.